|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **1.** Дан Δ Вписать паралелограмм с наиб. площ-ю. FE||AC; |AC|=b; |AD|=u; S=u(H-h)=Hu(1-h/H)=Hu(1-u/b). ΔFBE~ΔABC=>h/H=u/b.I(u)=Hu(1-u/b)→maxI’(u)=H(1-u/b)-Hu/b=H(1-2u/b); u=b/2; I’’(u)=HhFEABDC-2H/b<0=>т. макс. Ответ: b/2. | **2.** В вертик-ной плос-ти заданы 2 точки. Найти кривую, соединяющую эти точки, двигаясь по кот., под действием силы тяжести достигнуть от A до B за кратчайшее время. y(x) - ф-ция. АВabmv2/2=mgy; v=√2gy=ds/dt; dt=ds/√2gy;T-время от A до В; T=0∫a(√1+(y’(x))2/√2gy(x))dx **(1)**; y(0)=0 y(a)=b **(2)**Среди всех y(x) опред-ных на [0,a] имеющую производную y’ найти такую кот. доставляет мин. (1) и при этом (2) |  **3.** Дана замкнутая веревка длины L, требуется расположить так, чтобы она окружала большую площадь. Задана параметризованная кривая: {x(t) y(t)}. S=∫∫D1dxdy=0∫Lx(t)y’(t)dt **(1)**; по ф-ле Грина ∫∂D+Pdx+Qdy=∫∫D((∂Q/∂x)-(∂P/∂y))dxdy; P=0 Q=x; x(0)=x(L) y(0)=y(L) **(2)**; Центр тяжести кривой пусть лежит в начале координат. 0∫Lx(t)dt=0 0∫Ly(t)dt=0 **(3)**; Среди всех непр. диф-мых ф-ций x(t) и y(t) найти такие кот. доставляют макс. (1) и при этом (2)(3) | **4.** Имеется вагон, кот. нужно перегнать по рельсам за кратчайшее время в заданную точку.T=tк-tн; ma=F; x’’=a=F/m=u(t); x’’=u(t); x1=x; x2=x’; {x’1=x2; x’2=u}**(1)** |u(t)|≤k; **(2)** x1(tн)=x10; x2(tн)=x20 , x1(tк)=0 **(3)**; x2(tк)={0, остановился; x2k, иначе} Среди всех кусочно-непр-х ф-ций u(t) нвйти такую кот. доставляет минимум tк-tн и при этом вып. условия (1)(2)(3) |
| **5.** Задачи назыв. комбинаторными, если они м.б. решены перебором конечного числа вариантов. Граф, числа, найти маршрут с min суммой. Задача о вездеходе. из А в В 800км. На 100 км – 100л. топлива. Как переехать с мин. кол-вом горючего, если можно делать запасы? *Принцип оптимальности Беллмана:* Оптимальное поведение обладает свойством: каковы бы ни были положения решения в нач. момент времени, последующие реш-я должны составлять оптимальное поведение относительно состояния получающегося в рез-те первого реш-я. **Зам.** Принцип верен не для всех задач, но для болшинства. | **6.** В общем виде задача оптимизации ставится след. обр. Есть целевая ф-ция I(u) где u∈Ω. Найти такое u кот. доставляет min целевой ф-ции I(u). I(u)→min. *Задача математического программирования*. Ω={u∈Rn:gi(u)≤0, i=1..m} gi-заданная. Подтипы: **1.** Если хотя бы 1 из ф-ций I(u) или gi(u) нелинейна, => задача назыв. задачей нелинейного програм-ния. **2.** Если I(u),gi(u) i=1..m все линейны, то задача линейного програм-ния **3.** Если I(u) квадратична, по всем переменным не выше 2-го порядка, а все gi линейные, => задача квадратичного программ-ния **4.** Ω-мн-во векторов с целочисленн. корд-ми=>задача целочисленного программ-ния (в экономике) 5. I(u) и Ω-выпук, => задача выпуклого программ-ния *Задачи непрерывного действия* Ω-бесконечномерное мн-во. Если при этом Ω-это банохово пр-во, => задача вариационного исчисления. Как првило, Ω-пр-во ф-ций. Ω={(x(t),u(t)):dxi/dt=fi(t,x(t),u(t))} i=1..n. Задача оптимального управления I(x,u). дана I(u), u∈Ω⊂Rn.  | Число I\*-нижняя грань I(u) на Ω если ∀ε>0 ∃u∈Ω: I(u)<I\*+ε; I\*=inf I(u). Основная задача – среди всех u найти такие что I(u)=I\*, их мн-во назыв. решением задачи и обознач. U\*; конкр. реш - u\*. I(u\*)=I\*. ū – предельная точка мн-ва Ω если в нек. окр-ти этой (.) есть (..) u≠ū кот ∈Ω. Ω назыв. открытым если∀u∈Ω ∃U∈Ω. Ω назыв. замкнутым если оно содерж все свои предельные (..); ū-(.)лок. min I(u) на Ω если ∃ε>0: I(ū)≤I(u), u∈S(ū, ε)∩Ω. Если I(ū)<I(u), то ū – (.) строгого лок. min. Посл-ть (..) {uk} назыв. минимизирующей в задаче if I(uk) →I\* k→∞ Не всегда миним. посл-ть будет сход. к решению.**Т.** (Вейерштрасса) Если Ω - замкнут. огран. мн-во∈Rn и ф-ция I(u) непр. на Ω то U\* не пусто, замкнуто и огранич. ∀ минимиз-щая посл-ть сходится к u\*∈U\*. Пусть I:Rn→R. I’(u0)=grad I(u0); I’’(u0)=(∂2I(u0)/∂ui∂uj) i,j=1..n. Зам. Задачи на max можно свести к задачам на min I1(u)=-I(u). | **7.** I:R→R. I(u)→inf u∈[a,b]=Ω ф-ция I унимодальная на [a,b] если ∃α, β: a<α≤β<b; на [a,α] I(u) строго монотонно убывает, на [α,β] она постоянна, на [β,b] монот. строго возр. *Метод деления отр-ка пополам* I(u) – унимодальная ф-ция на [a,b] **1.** выбираем ε>0, δ>0, δ<(b-a)/2; u1=(a+b)/2-δ/2; u2=(a+b)/2+δ/2; **2.** if I(u1)<I(u2) то a1:=a, b1:=u2 иначе a1:=u1, b1:=b; **3.** Продолжаем процесс на [a1,b1] **4.** Считаем до тех пор, пока не окажется что bk-ak<ε В этом случае в кач-ве реш-я задачи берется середина последнего знач-я u\*=(ak+bk)/2 Заметим что длина отрезка b1-a1=(b-a)/2-δ/2 т.е. длина уменьшилась почти в 2 раза |
| **8.** Говорят что (.)φ осуществляет золотое сечение [A,B] если отнош-е длины отр-ка к его большей части равно отнош-ю длины большей части у меньшей. |AB|/|Aφ|=|Aφ|/|Bφ| Можно разделить отрезок [0,1] золотым сеч-ем а потом умнож. на длину отрезка. 1/φ=φ/(1-φ); 1-φ=φ2; φ2+φ-1=0; φ=(-1+√5)/2=0,618; Расм. φ1=1-φ; φ1=φ2 т. φ осущ-ет золотое сеч-е [0,φ]; φ/φ1=φ1/(φ-φ1); φ/φ2=φ2/(φ-φ2); 1/φ=φ/(1-φ); вып. *Метод:* I(u)→min; u∈[a,b]; **1****.** u1=a+φ2(b-a); u2=a+φ(b-a);**2.** if I(u1)>I(u2) то a:=u1; u1:=u2; u2:=u1+φ(b-a); иначе b:=u2; u2:=u1;u1:=a+φ2(b-a); Зам.1. за 1 шаг этого метода длина отр-ка стала b1-a1=φ(b-a) Зам.2. Этот метод считается лучше метода деления пополам. | **9.** Тройка чисел u1 u2 u3 выпуклая для ф-ции I(u) если вып.: ∆¯=I(u1)-I(u2)≥0; ∆+=I(u3)-I(u2)≥0; ∆¯+∆+>0.Через 3 точки можно провести ! параболу. В кач-ве этой параболы можно взять многочлен Лагранжа и найти её т. min=ū=u2+((u3-u2)2∆¯-(u2-u1)2∆+)/2((u3-u2)∆¯+(u2-u1)∆+) *Метод:* выбираем u0 из [a,b]; u1=u0+h; if I(u1)>I(u0) то пошли не в ту сторону. переоб: v:=u0; u0:=u1; u1:=v; h=-h; uk+1=u0+2kh, k=1,2,… после этого каждый раз надо проверять: **1.** ∈ ли uk+1 отрезку [a,b]? if нет, то uk+1=ближайший конец отрезка [a,b] 2. образуют ли 3 точки выпуклую тройку? if да, то приближенная (.) min = ū. Иначе берут последнюю (.) Зачастую метод парабол применяют несколько раз но в след. раз в кач-ве u0 берут ū, найденную (.) min на пред. шаге, и считают с меньшим шагом | **10.** Для поиска глоб. min на отр-ке if ф-ция не явл. унимод-й можно взять ряд точек на [a,b] и искать (..) лок. min отправляясь кажд раз от новой (.); if окажется что при этом получается одна и та же (.) min то считается что задача решена. if получаются разные (..) min то в кач-ве реш-я задачи берут ту, в кот. знач-е целевой ф-ции меньше.  | **11.** I(u)→inf **(1)**; u∈Ω⊂Rn; Ω={u∈Rn:gi(u)=0, i=1..s} **(2)** где gi – заданная. Задача нахождения u\* удовл gi и доставл. min I(u) назыв задачей на усл-й экстремум(с огранич-ями типа равенств)  |
| **12.** L(u,λ0,λ)=λ0I(u)+Σλigi(u); λ0.. λS-множе тели Лагранжа. **Т.**о неявной фции {ψ1..S(u1,…,uS)-ψ1..S(u1\*,…,uS\*)=η1..S} if η1=…=ηS=0; Dψ(u\*)/D(u)≠0; тогда при достаточно малых η1…ηS система имеет ! реш-е причем ||(u1(η)-u1\*,…,uS(η)-us\*)||→0 при ||η||→0 **Т.** if u\* - реш-е (1)(2) и в u\* ∃ I’u(u\*), g’iu(u\*) то ∃ют множ-ли Лагр-а такие что **1)**|λ0\*|+|λ1\*| +…+|λS\*|≠0 **2)** L’u(u\*,λ0\*,λ\*)=0 **3)**для λ0\*≠0 дост. чтобы g’iu(u\*)… g’su(u\*) были лин. независимы **Док-во** I’u(u\*),g’iu(u\*) если докажем лин. зав-ть векторов то докажем 1)2)ℿ: усл-е 2) не вып, вектора незав.=>если сост. матр. $\left(\begin{matrix}∂I(u\_{\*})/∂u\_{1}&∂g\_{1}(u\_{\*})/∂u\_{1}&∂g\_{S}(u\_{\*})/∂u\_{1}\\\vdots &\ddots &\vdots \\∂I(u\_{\*})/∂u\_{n}&∂g\_{1}(u\_{\*})/∂u\_{n}&∂g\_{S}(u\_{\*})/∂u\_{n}\end{matrix}\right)$ то ранг=s+1,тогда М(опр-ль при n=s+1)≠0; $ \left\{\begin{array}{c}I\left(u\_{1},..u\_{S+1},u\_{S+2\*},..u\_{n\*}\right)-I\left(u\_{\*}\right)=-E\\g\_{1}\left(u\_{1},..u\_{S+1},u\_{S+2\*},..u\_{n\*}\right)=0\\g\_{S}\left(u\_{1},..u\_{S+1},u\_{S+2\*},..u\_{n\*}\right)=0\end{array}\right.$ ε>01-я строка <I(u\*) остальные означают что вып. огр-я **3)** в этой точке. По т-ме о неявной ф-ции поскольку М≠0 сис-ма имеет ! реш-е причем ui(ε)→ui\* при ε→0 т.о. u\* не точка min, противоречие. **Док-во 3-го св-ва**: ℿ: λ0\*=0; g’1u(u\*),…g’Su(u\*) независ. Тогда Σλi\*g’iu(u\*) =0 а это означает линейную зав-ть gi получили противор.**Зам**. если λ0\*,…λS\* удовл **2)** то и cλ0\*,..cλS\* | **13.** I(u)→inf **(1)**; u∈Ω⊂Rn; Ω={u∈Rn:gi(u)=0, i=1..s} **(2)** где gi – заданная. *Нах-ие точек подозр на усл-й экстремум.* Выписать сис-му {L’u(u,λ0,λ)=0; L’λ(u,λ0,λ)=0 } тут n+s урав-й и n+s+1 неизв. Если λ0\* не м.б. =0 то полагаем λ0\*=1 иначе доп. условие: ||(λ0\*,λ1\*,.., λS\*)||=1 и отдельно рассм случай λ0\*=0. Реш-я этой сис-мы являются стац. точками (1)(2), а точки u\* назыв. подозр. на экстремум. Доп. исследованиями надо выяснить, будут ли они реш-ями (1)(2) | **14.** u=(ū,v); ū=(u1…un-S); v=(un-S+1…un); I(u,v)→inf **(1)**; gi(u,v)=0 i=1..s **(2)** g=(g1..gS); (u\*,v\*)-точка подозр. на экстр-м. тогда в точке ∃ обр. матр. (g’v(u\*,v\*))-1=> g лин. незав. Возьмем λ0\*=1. ∆L=L(u\*+∆u,v\*+∆v)-L(u\*,v\*)=I(u\*+∆u,v\*+∆v)-I(u\*,v\*)=∆I Разложим в ряд Тейлора (2): 0=g(u\*+∆u,v\*+∆v)-g(u\*,v\*)=g’u(u\*,v\*)∆u+ g’v(u\*,v\*)∆v+o(∆u,∆v) => ∆v= -(g’v(u\*,v\*))-1gu(u\*,v\*)∆u +o(∆u,∆v); ∆L=<Lu\*,∆u>+<Lv\*,∆v>+ 0.5<$\left(\begin{matrix}L\_{uu}^{\*}&L\_{uv}^{\*}\\L\_{vu}^{\*}&L\_{vv}^{\*}\end{matrix}\right)\left(\begin{matrix}∆u\\∆v\end{matrix}\right),\left(\begin{matrix}∆u\\∆v\end{matrix}\right)$>+o(∆u2,∆v2); Lu\*=L’u(u\*,v\*,λ0, λ); Luu\*=L’’u(u\*,v\*,λ0, λ); Lu\*=Lv\*=0; ∆I=∆L=$\frac{1}{2}\left〈\left(\begin{matrix}L\_{uu}^{\*}&L\_{uv}^{\*}\\L\_{vu}^{\*}&L\_{vv}^{\*}\end{matrix}\right)\left(\begin{matrix}∆u\\-(g\_{v}^{'})^{-1}g\_{u}^{'}∆u\end{matrix}\right),\left(\begin{matrix}∆u\\-(g\_{v}^{'})^{-1}g\_{u}^{'}∆u\end{matrix}\right)\right〉$+o(∆u2)=$\frac{1}{2}\left〈\left(\begin{matrix}L\_{uu}^{\*}&L\_{uv}^{\*}\\L\_{vu}^{\*}&L\_{vv}^{\*}\end{matrix}\right)\left(\begin{matrix}E\\-(g\_{v}^{'})^{-1}g\_{u}^{'}\end{matrix}\right)∆u,\left(\begin{matrix}E\\-g\_{v}^{'}^{-1}g\_{u}^{'}\end{matrix}\right)∆u\right〉 $+o(∆u2)=/E-единичная матрица/= o(∆u2) +$\frac{1}{2}\left〈(E-g\_{u}^{'T}(g\_{v}^{'T})^{-1})\left(\begin{matrix}L\_{uu}^{\*}&L\_{uv}^{\*}\\L\_{vu}^{\*}&L\_{vv}^{\*}\end{matrix}\right)\left(\begin{matrix}E\\-(g\_{v}^{'})^{-1}g\_{u}^{'}\end{matrix}\right)∆u,∆u\right〉=\frac{1}{2}\left〈D∆u,∆u\right〉+o(∆u^{2})$*;* D=L\*uu-L\*uv(g’v)-1g’u-(g’u)T(g’vT)-1L\*vu+(g’u)T(g’vT)-1 L\*vv(g’v)-1g’u; Если в задаче (1)(2) точка (u\*,v\*)- лок min, в кот ∃ первые и вторые произв-е ф-ций I и g, то матрица D положит. опред-ная, более того, if (u\*,v\*)-стац. точка и ∃ произв-ые до 2го порядка включит-но матрицы D>0 то (u\*,v\*)- (.) лок.min (1)(2) **Т.** u\* стац. (.) и D>0 ⬄ u\*- лок min **Док.** *Н*. u\*- (.) лок min=>∆I≥0; <D∆u,∆u>+ o(∆u2)≥0=>D≥0 *Д* u\* - стац. (.) => ∆I=<D∆u,∆u>*{>0}*+o(∆u2)≥0 | **15.** Есть 2 точки u1, u2. Отрезком, их соединяющим, называется мн-во точек вида u=αu1+(1-α)u2; α∈[0,1] мн-во U⊂Rn назыв-ся выпуклым if вместе с двумя ∀ его точками этому мн-ву ∈ и отрезок, их соедин-щий. **Т.** ∩ выпуклых мн-в в ∀ кол-ве явл. выпуклым мн-вом. **Док.** пусть U0=∩Ui; i∈I; Ui - выпук мн-вa; пусть u1 и u2 ∈U0. т.к. U0=∩Ui, u1,u2∈Ui ∀i∈I; т.к. Ui выпук то отрезок соедин-щий u1 и u2 лежит во всех Ui => лежит в U0. т.о. 2 точки и отрезок в U0. Зам. Объед. выпуклых мн-в не всегда явл выпуклым. Рассм. π={u∈Rn:<c,u>=λ} 0≠c∈Rn; λ∈ R; π – гиперплоскость **Утв.** мн-во π-выпуклое. Док-во сам.π+={u∈Rn:<c,u>≥λ} полупр-во, выпуклое. Док: u1,u2∈π+; <c,u1>≥λ; <c,u2>≥λ; Покажем что и отезок ∈π+ : u=αu1+(1-α)u2 ∈π+ ∀α∈[0,1]; <c,u>=<c,αu1+(1-α)u2>=<c,αu1>+<c,(1-α)u2>=α*{*≥*0}*<c,u1>+(1-α)*{≥0}*<c,u2>*{≥λ}* ≥ αλ+(1-α)λ=λ. В линейном программировании U={u∈Rn:Au≥b} выпукло. A:n×m; B: m **Док-во** cj – jй столбец матрицы; <cj,u>≥bj j=1..m; c1=(a11 a12); a11u1+a12u2≥b1; a21u1+a22u2≥b2; π+j={u∈Rn:<cj,u>≥bj} π+ - выпуклое; U=∩π+j j=1..m чтд |
| **16.** Дана (.) v и нек. мн-во U∈Rn Расстоянием от мн-ва U до v называется d=inf||u-v||,u∈U. Точка p∈U – проекция v на U если ||p-v||=d **Т.** if мн-во U выпуклое и замкнутое в Rn то для ∀ (.) v∈Rn ∃! проекция точки v на U **Док-во.** Рассм {uk} uk∈U: ||uk-v||→d,k→∞; {||uk-v||} ограничено=>{||uk||} огр=>можно выделить сход-юся подпосл-ть. Пусть uk→p,k→∞, т.к. мн-во U замк. Перейдем к lim: ||p-v||=d, p – проекция v на U. **Док. единств-ти.** ℿ ∃ p1≠p: ||p-v||=d, ||p1-v||=d; z=(p+p1)/2; ||x+y||+||x-y||=2(||x||+||y||); 4||v-z||2+||p-p1||2=2||v-p||2+2||v-p1||2; p1,p∈U-вып.=>содерж. отрезок, соед. точки.=> z∈U; ||v-z||≥d=>||v-z||2≥d2; ||p-p1||2=4d2-4||v-z||2≤4d2-4d2=>||p-p1||=0=>p=p1 чтд **Зам.** при док-ве единст-ти использовалось равенство паралелограма кот справедливо для гильбертовых норм (пораждаемых скалярым произв-ем ||u||=√<u,u>) если норма другая то единств-ти может не быть ||u||=max{u1,u2} | **17.** Для того чтобы p была проекцией v на U(выпук и замкн) н. и д. <u-p,v-p> ≤0 **(1)**. **Док-во** *Н.* возьмем произвольную u∈U; z=αu+(1-α)p 0≤α≤1 z∈U; ||z-v||2≥||p-v||2; ||z-v||2=||αu+(1-α)p-v||2=||α(u-p)+p-v||2=<α(u-p),α(u-p)>+2<α(u-p),p-v>+<p-v,p-v>= α2||u-p||2+2α<u-p,p-v>+||p-v||2≥||p-v||2=>α||u-p||2+2<u-p,p-v>≥0 При α=0: <u-p,p-v> ≥0. *Д.* Пусть (1).=><u-p,p-v>≥0; ||u-v||≥||p-v|| ∀u∈U ||u-v||2=||u-p+p-v||2=<u-p+p-v,u-p+p-v>=<u-p,u-p>+2<u-p,p-v>+<p-v,p-v>=||u-p||2*{≥0}* +2<u-p,p-v>*{≥0}*+||p-v||2≥||p-v||2 чтд.  | **18.** Рассм. гиперплоскость π={u∈Rn:<c,u>=λ} 0≠c∈Rn; λ∈R; Говорят что гиперпл-ть π разделяет точку v и мн-во U если {<c,v>=λ; <c,v><λ ∀u∈U} Если v – это граничная (.) мн-ва U то гиперпл-ть π назыв. опорной к мн-ву U в точке v если {<c,v>=λ; <c,v>≤ λ ∀u∈U} **Т.** Дано U∈Rn и (.) v$\notin \overbar{U}$ и U выпук. Тогда ∃ разделяющая гиперпл-ть т.е. ∃ с≠0: <c,v>=λ; <c,u>< λ ∀u∈U **Док**. p – проекция v на U. Тогда в кач-ве c возьмем с=v-p≠0 т.к. p∈$\overbar{U}$ v$\notin \overbar{U}$; пусть λ=<c,v>; <c,u>=<v-p,u> ≤ т.к. p -проекция, <u-p,v-p> ≤0; <v-p,u-p>≤0; <v-p,u> - <v-p,p> ≤0; <v-p,u>≤<v-p,p> ≤ <v-p,p> ≤ ||v-p||2≥0; <v-p,v-p> >0; <v-p,v>-<v-p,p> >0; <v-p,v> > <v-p,p> ≤ <v-p,v>=<c,v>= λ чтд. **Зам.** расм. π1={u∈Rn:<c/||c||,u>=λ/||c||} Поэтому в опред-ии гиперпл-ти без ограничения общности можно считать что ||c||=1 | **19. Т.** Если v – граничная (.) выпуклого мн-ва U∈Rn то ∃ опорная гиперпл-ть в (.) v к мн-ву U т.е. ∃с≠0: <c,v>=λ; <c,u>≤ λ ∀u∈U **Док.** v-граничн => ∃{vk}$\notin \overbar{U}$: lim vk=v,k→∞ Тогда ∃ посл-ть векторов {ck} и посл-ть чисел {λk}: 1) ||ck||=1 2) <ck,vk>= λk 3)<ck,u>< λk; Поскольку ||ck||=1 то посл-ть ограничена. Из огр. посл-ти можно выделить сход. подпосл-ть. Будем считать что сама посл-ть уже сход. и c=lim ck ||c||=lim||ck||=lim1=1 => ||c||=1, c≠0; Во 2) устремим k→+∞; ck→c; vk→v; λk →λ; <c,v>=λ. В 3) ck→∞; <c,u>≤ λ чтд. |
| **20.** u0 назыв. крайней(или угловой) точкой для мн-ва U⊂Rn если $∄$ u1,u2∈U:u0=αu1+(1-α)u2; α∈(0,1). u0 назыв. (линейной) выпуклой комбинацией точек u1..un если u0=Σαkuk; αk≥0; Σαk=1. **Т.** ∀ (.) выпук замкн огран мн-ва U∈Rn явл. выпуклой комбинацией конечного числа крайних точек этого мн-ва **Док.** Мат. индук. по размерности линейного многообразия, содержащего мн-во U. n=1: U-отрезок на вещ. оси, u0=αu1+(1-α)u2; α1+α2=α+1-α=1. Пусть верно для n=k. n=k+1: U⊂Rk+1 *1 случай:* u0 – гранич. => по Т. об опорной гиперпл-ти, ∃ опорная гиперпл-ть π к мн-ву U, проход. через (.) v; <c,v>=λ ∀u∈U; <c,u>≤ λ; U0=π∩U; U0-замкн, огр, выпук мн-во и его размерность ≤k. Согласно предп. инд-ции U0 представимо в виде лин. комб-ции Σαkuk, где uk∈U0. Покажем что uk будут крайними (..) U. ℿ uk – крайние для U0, но не крайние для U. uk=αu1+(1-α)u2 α∈(0,1) **(1)**;<c,u1>≤λ; <c,u2>≤λ; Из (1) найдем u1: αu1=uk-(1-α)u2; u1=uk/α-((1-α)/α)u2; <c,u1>=<c,uk/α-((1-α)/α)u2> = <c,uk/α>-<c,((1-α)/α)u2>=(1/α)<c,uk>-((1-α)/α)<c,u2> ≥ (1/α)λ-((1-α)/α)λ; <c,u1> ≥ λ; <c,u1>=λ =>u1∈U0 аналогично выражая из (1) u2 получим u2∈U0. Из (1)=> uk не явл. крайней (.) мн-ва U0. *2 случай.* u0 – внутр (.) Проведем через u0 прямую и она пересечет границу U в (..) v и w; v=Σαkuk; αk≥0; Σαk=1; w=Σβkuk; βk≥0; Σβk=1; u0=αv+(1-α)w=αΣαkuk+(1-α) Σβkuk; ααk≥0; (1-α)βk≥0; αΣαk+(1-α)Σβk=α+1-α=1 чтд | **21.** I(u): [a,b]→R называется выпуклой на [a,b] если ∀u1,u2∈[a,b] ∀0≤α≤1: I(αu1+(1-α)u2)≤αI(u1)+(1-α)I(u2). Геом. это означает что график ф-ции лежит не выше секущей для ∀ (..). I(u) назыв. вогнутой на [a,b] если -I(u) выпукла на этом отр-ке. **Т.** I(u) выпуклая на [a,b] н.и д. ∀v,u,w: a≤v<u<w<b: (I(u)-I(v))/(u-v)≤(I(u)-I(v))/ (w-v)≤ (I(w)-I(u))/(w-u) **(1)** **Док.** u=αv+(1-α)w=αv+w-αw; u-w=α(v-w); α=(u-w)/(v-w)=(w-u)/(w-v); 1-α=1-(w-u)/(w-v)=(w-v-w+u)/(w-v)=(u-v)/(w-v); I(u)≤ I(v)(w-u)/(w-v)+ I(w)(u-v)/(w-v) **(2)**; покажем что (2)и левая часть (1) это одно и то же. (w-v)(I(u)-I(v))≤(I(w)-I(v)) (u-v); wI(u)-wI(v)-vI(u)+~~vI(v)~~≤I(w)u-I(w)v-I(v)u-~~I(v)v~~; wI(u)-vI(u)-wI(v)≤ I(w)u-I(v)u-I(w)v; I(u)(w-v)≤I(w)(u-v)+ I(v)(w-u) **(3)**. Поделим на w-v => (2). Аналогично справедливость правой части (1). Правая часть (2) равносильна (3). (w-u)(I(w)-I(v))≤(w-v)(I(w)-I(u)); wI(w)-wI(v)-uI(w)+uI(v)≤wI(w)-wI(u)-vI(w)+vI(u); (u-w)I(v)-uI(w)≤(v-w)I(u)-vI(w); (v-w)I(u)≥ (u-w)I(v)+(v-u)I(w). Умнож. на -1 =>(3). Если I(u) выпукла на [a,b] то ∀u∈(a,b) ∃ I’(u+0), I’(u-0) и кроме того I’(u-0)≤ I’(u+0); I(u) непрер. Выберем t и h: 0<t<h; u-h,u+h∈[a,b]; ф-ция выпук => по (1): (I(u)-I(u-h))/h≤ (I(u)-I(u-t))/t≤(I(u+t)-I(u))/t≤(I(u+h)-I(u))/h. Расм. φ(t)= (I(u+t)-I(u))/t; из двух пследних нер-в: φ(t) не убывает (I(u)-I(u-h))/h≤φ(t)=>огр снизу. ∃limφ(t)=I’(u+0),t→0+ Аналогично, ∃левая и правая произв-я=>I(u) непр. | **22**. I:U→R; U⊂Rn; U-выпуклое; I назыв выпуклой если ∀u1,u2∈U 0≤α≤1: I(αu1+(1-α)u2)≤αI(u1)+(1-α)I(u2) | **23.** Т. Для того, чтобы диф-мая ф-ция на выпуклом мн-ве U была выпуклой, н.и д. ∀u,v∈U: I(u)≥I(v)+<I’(v),u-v> **(1)**. **Док.** *Н.* Возьмем ∀u,v∈U и выберем ε∈(0,1). Рассм. (I(v+ε(u-v))-I(v))/ε= v+ε(u-v)=v+εu-εv=εu+(1-ε)v =(I(εu+(1-ε)v)-I(v))/ε≤(εI(u)+(1-ε)I(v)-I(v))/ε=(εI(u)-εI(v))/ε=I(u)-I(v)=Рассм φ(ε)=I(v+ ε(u-v)) тогда = (φ(ε)-φ(0))/ε→φ’(0) при ε→0+; φ’(0)=<I’(v+ε(u-v)),u-v>|ε=0=<I’(v),u-v>; <I’(v),u-v>≤I(u)-I(v) чтд. *Д.* Пусть вып. (1) Возьмем ∀u1,u2∈U 0≤α≤1; Рассм uα=αu1+(1-α)u2; u=u1; v=uα; I(u1)≥I(uα)+<I’(uα),u1-u2> **(2)**; u1-uα=u1-αu1-(1-α)(u1-u2); u=u2; v=uα; I(u2)≥I(uα)+<I’(uα),u2-uα> **(3)**; u2-uα=u2-αu1-(1-α)u2=-αu1+αu2=α(u2+u1) умножим (2) на α, а (3) на (1-α) и сложим; αI(u1)+(1-α)I(u2)≥ αI(uα)+(1-α)I(uα)+α<I’(uα),(1-α)(u1-u2)>+(1-α) <I’(uα),α(u2-u1)>; αI(u1)+(1-α)I(u2)≥I(u2)+ <I’(uα),α(1-α)(u1-u2)+α(1-α)(u2-u1)>=I(αu1+(1-α)u2) чтд. |
| **31.** I(u)→inf **(1)**; u∈U={u∈U0⊂Rn:gi(u)≤0, i=1..s} **(2)** где gi – заданная. Введем новое мн-во Л0;т. (u\*,λ\*) назыв. седловой т. ф-ции Лагранжа L(u,λ)=L(u,1,λ) на мн-ве U0×Л0 если u\*∈U0, λ\*∈Л0 и∀u∈U0, λ∈Л0 вып усл-е α(u\*,λ)≤L(u\*,λ\*)≤α(u,λ\*) **Т.** Пусть в задаче (1)(2) вып. условие Слейтора, т.е. ∃u∈U0: ∀ i=1..s gi(u)<0. Тогда для того, чтобы u\* была реш-ем (1)(2) н.и д. ∃λ\*1≥0,…, λ\*S≥0 такие что (u\*,λ\*) была седловой точкой ф-ции Лагранжа на мн-ве U0×Л0 | **32.** Среди всех кусочно-непр-х ф-ций u(t) на [t0,t1] найти ту, кот. доставляет минимум I(x,u)= t0∫t1f0(s,x(s),u(s))ds+Ф0(t0,t1,x(t0),x(t1)) и чтобы выполнялись условия $\dot{x}$=f(t,x,u) – урав-я движения; Фi(t0,t1,x(t0),x(t1))=0 – краевые усл-я; u(t)∈U⊂Rm – огран-е на управление; x(t)∈Ω⊂Rn – фазовое огран-е; t∈[t0,t1]; x:R→Rn; u:R→Rm; f0,f,Фi-заданные ф-ции; Rn-базовое пр-во; Пример. запустить спутник на орбиту радиуса r используя мин. кол-во горючего. u1-угол, u2-сила тяги ракеты, m-масса, f1,f2-прочие внеш. силы.m$\ddot{x}$=u2cosu1+f1; m$\ddot{y}$=u2sinu1+f2; Обозн x1=x, x2=x’, x3=y,x4=y’; $\left\{\begin{array}{c}x^{'}\_{1}=x\_{2} \\x^{'}\_{2}=\frac{u\_{2}}{m}cosu\_{1}+\frac{f\_{1}}{m}\\x^{'}\_{3}=x\_{4} \\x^{'}\_{4}=\frac{u\_{2}}{m}sinu\_{1}+\frac{f\_{2}}{m}\\m=-G\left(t\right) \end{array}\right.\left|u\_{2}\right|\leq M;\left\{\begin{array}{c}x\_{1}\left(t\_{0}\right)=x\_{0}\\x\_{3}\left(t\_{0}\right)=y\_{0}\\x\_{2}(t\_{0})=x'\\x\_{4}(t\_{0})=y'\\m(t\_{0})=m^{0}\end{array}\right.$x21(t1)+x23(t1)=r2x22(t1)+x24(t1)=v2x1(t1)x2(t1)+x3(t1)x4(t1)=0 | **33.** Составим ф-цию Лагранжа. L(u,x,λ)=λ0 t0∫t1f0(s,x(s),u(s))ds+ λ0Ф0(t0,t1,x(t0),x(t1))+ t0∫t1<λ(t),-x’+f(t,x,u)>dt+ΣμiФi **(1)** H(t,x,u,λ0,λ)=λ0f0(t,x,u)+<λ(t),f(t,x,u)> - ф-ция Гамильтона-Понтрягина; Рассм. t0∫t1<λ(t),-x’>dt=-<λ(t),x>|t0t1+t0∫t1<λ’(t),x>dt=-<λ(t1),x(t1)> +<λ(t0),x(t0)>+t0∫t1<λ’(t),x>dt; l(t0,t1,x(t0),x(t),μ)=ΣμiФi i=0..s; μ0=λ0 Теперь (1) можно переписать в виде L(u,x,λ)=t0∫t1H(t,x,u,λ0,λ)dt+l-<λ(t1),x(t1)>+ <λ(t0),x(t0)>+t0∫t1<λ’(t),x>dt; dL=t0∫t1(<∂H/∂x,dx>+<∂H/∂u,du>+<λ’(t),dx>)dt+<∂l/∂x(t1),dx(t1)>+<∂l/∂x(t0),dx(t0)>-<λ(t1),dx(t1)>+<λ(t0),dx(t0)>; Условия: λ’(t)=-∂H(t,x,u,λ0,λ)/∂x; λ(t1)=∂l/∂x(t1); λ(t0)=-∂l/∂x(t0); dL=t0∫t1<∂H/∂u,du>dt. **Лемма.** если∀ кусочно-непр. ф-ции hi(t) выполн. t0∫t1(∂H/∂ui)hi(t)dt=0 **(2)**, а ф-ция ∂H/∂ui непр, то ∂H/∂ui=0 **Док**. ℿ: ∃τ∈(t0,t1): ∂H(τ)/∂ui≠0, пусть>0. Ф-ция непр, => ∃δ>0 ∀t∈[τ-δ,τ+δ]: ∂H(t)/∂ui>0 ∀hi кус-непр. Предп, hi={1, t∈[τ-δ,τ+δ]; 0, else}; t0∫t1(∂H/∂ui)hi(t)dt=τ-δ∫τ+δ∂H/∂uidt >0 противор. с (2) чтд.  | **34.** 1) по задаче I(x,u)= t0∫t1f0(s,x(s),u(s))ds+ Ф0(t0,t1,x(t0),x(t1)) **(1)** $\dot{x}$=f(t,x,u) **(2)** Фi(t0,t1,x(t0),x(t1))=0 **(3)** u(t)∈U⊂Rm **(4)** x(t)∈Ω⊂Rn **(5)** выписать H(t,x,u,λ0,λ)=λ0f0(t,x,u)+<λ(t),f(t,x,u)>2) Выписать вспом. ф-цию l(t0,t1,x(t0),x(t),μ)=ΣμiФi i=0..s;3)вып ур-е λ’(t)= -∂H(t,x,u,λ0,λ)/∂x; **(6)**4)вып условие трансверсальности {λ(t1)=∂l/∂x(t1); λ(t0)=-∂l/∂x(t0);}**(7)**5)вып усл-е ∂H/∂u=0 **(8)**6)из усл-я (8) найти такое u=u(t,x,λ) удовл (8)7)найденное u подставить в (2) и в (6) и решить полученную сис-му с краевыми усл-ми (3) и (7)8) Полученные x(t) и λ(t) подставить в u=u(t,x,λ). Получим u(t), кот будет подозрительным на экстремум.9)Доп. исследованиями выяснить будет ли она реш-ем поставленной задачи. |
| **35.** Ставится задача оптимального управления. I(x,u)= t0∫t1f0(s,x(s),u(s))ds+Ф0(t0,t1,x(t0),x(t1));**(1)**$\dot{x}$=f(t,x,u) **(2)**; Фi(t0,t1,x(t0),x(t1))=0 i=1..s; **(3)** u(t)∈U⊂Rm x(t)∈Ω⊂Rn**(4)**; моменты времени t0 и t1 могут быть заданы или нет. Строится H(t,x,u,λ0,λ)=λ0f0(t,x,u)+<λ(t),f(t,x,u)>; l=ΣμiФi i=0..s; μ0=λ0; λ’(t)=-∂H(t,x,u,λ0,λ)/∂x **(5)**; **Т.** Если u(t),x(t)-это оптимальное управление и оптимальная траектория в задаче (1)-(5) и ф-ции f0,f,Фi i=0..s непр диф-мы по x и по u тогда ∃ множители λ0,λ1(t)…λn(t),μ1..μS такие что 1) |λ0|+|λ1(t)|+…+|λn(t)|+|μ1|+…|μS|≠0; λ0≥0;2) λ(t) – решение (5), соответств-щее оптимальному упр-ю u(t) и x(t). 3) усл-я трансверсальности λ(t1)=∂l/∂x(t1); λ0(t1)=-∂l/∂x(t0); λ(ti)=(-1)i+1(∂l/∂x(ti)); 4) вып. условия минимума H(t,x(t),u(t),λ0,λ(t))=min H(t,x(t),u,λ0,λ(t)) u∈U. 5) H(ti,x(ti),u(ti),λ0,λ(ti))=(-1)i(∂l/∂ti) i=0..1 – только для незакрепленных концов времени | **36.** 1) по задачеI(x,u)= t0∫t1f0(s,x(s),u(s))ds+ Ф0(t0,t1,x(t0),x(t1));**(****1****)** $\dot{x}$=f(t,x,u) **(2)**; Фi(t0,t1,x(t0),x(t1))=0 i=1..s; **(3)** u(t)∈U⊂Rm **(4)** x(t)∈Ω⊂Rn**(5)** выписать ф-цию H(t,x,u,λ0,λ)= λ0f0(t,x,u)+<λ(t),f(t,x,u)>, ф-цию l=ΣμiФi i=0..s; μ0=λ0; ур-е $\dot{λ}$(t)=-∂H(t,x,u,λ0,λ)/∂x **(6)** и усл-е λ(t1)=∂l/∂x(t1); λ0(t1)=-∂l/∂x(t0); **(7)**2) Из усл-я (3) найти u=u(t,x,λ) кот. доставляет min ф-ции H. 3) подставить u=u(t,x,λ) в (2) и (6) и решить полученную сис-му с условиями (3) и (7). В итоге получим x(t) и λ(t).4)подставить полученные x и λ в u(t,x,λ), получим u(t,x(t),λ(t)) – это управление будет подозр. на экстр-м.5) Доп. исслед-ми выяснить, будет ли оно оптимальным. **Зам.** часто в задачах после 2го пункта удаетсчя выяснить, м.б. λ0=0? Если нет, то λ0=1, иначе рассм. случай λ0=0. | **37.** Задача:I(x,u)= t0∫t1f0(s,x(s),u(s))ds+ Ф0(t0,t1,x(t0),x(t1));**(1)**$\dot{x}$=f(t,x,u) **(2)**; Фi(t0,t1,x(t0),x(t1))=0 i=1..s; **(3)** u(t)∈U⊂Rm **(4)** x(t)∈Ω⊂Rn**(5)** При реш-ии задач с пом-ю принципа max самое сложное – решить сис-му {$\dot{x}$=f(t,x,u); $\dot{λ}$(t)=-∂H(t,x,u,λ0,λ)/∂x} но её можно записать в след виде: {$\dot{x}$=∂H(t,x,u,λ0,λ)/∂λ; $\dot{λ}$=∂H(t,x,u,λ0,λ)/∂x} **(6)** (Гамильтонова сис-ма)**Т.** Если в задаче (1)-(5) ф-ции f0 и f явно не зависят от t то сис-ма (6) имеет первый интеграл в виде H(x,u,λ0,λ)=const. Док. Если есть$\dot{x}$=f(t,x), для того чтобы V(t,x) была 1-ым интегралом, н.и д. ∀t,x: ∂V(t,x)/∂t+(∂V(t,x)/∂x)f(t,x)=0; ∂V(t,x)/∂x+Σ(∂V(t,x)/∂xi)fi(t,x)=0 **(7)**; x1→x; x2→λ; V→H; H=λ0f0(x,u)+<λ,f(x,u)>; ф-ции H,λ не зависят от t т.к. f0 не зав от t => ∂H/∂t=0; <∂H/∂x; ∂H/∂λ>+<∂H/∂λ;-∂H/∂x>=0 =>(7), чтд | **38.** Ставится задача вариационного исчисления: среди всех x(t) имеющих производную $\dot{x}$(t) найти ту кот. доставляет min функционалу I(x)=t0∫t1f0(t,x(t),$\dot{x}$(t))dt+ Ф0(x(t1)) **(1)** и должно x(t0)=x0 **(2)**; $\dot{x}$=u(t) **(3)**; тогда (1) перепишется в виде: I(x,u)=t0∫t1f0(t,x(t),u(t))dt+Ф0(x(t1)) **(1’)** Получим задачу (1’)(2)(3). Применим принцип max. 1. H(t,x,u,λ0,λ)=λ0f0+ <λ(t),f(t,x,u)>=λ0f0+λ(t)u(t); l=ΣμiФi i=0..s =λ0Ф0(x(t1))+μ(x(t0)-x0); 2. $\dot{λ}$=-∂H/∂x=-λ0∙(∂f0/∂x); λ(t1)=λ0∙(∂Ф0(x(t1))/∂x(t1)); λ(t0)-μ; 3. ∂H/∂u=0; λ0∙(∂f0(t,x,u)/∂u)+λ(t)=0; λ(t)=-λ0∙(∂f0(t,x,u)/∂u); выясним, м.б. λ0=0? λ0=0=> λ(t)=0=>μ=0; но по усл-ю они не могут =0 одновременно. положим λ0=1. ∂H/∂u= (∂f0(t,x,u)/∂u)+λ(t)=0. дифф по t. (d/dt)(∂f0(t,x,u)/∂u)+$ \dot{λ}$(t)=0; (d/dt)(∂f0(t,x,u)/∂u)-∂f0(t,x,u)/∂x=0; (∂f0(t,x,$\dot{x}$)/∂x)-(d/dt)(∂f0(t,x,$\dot{x}$)/∂$\dot{x}$)=0; получим ур-е Эйлера для задачи вариационного исчисления. |
| **39.** *ур-е Эйлера* (∂f0(t,x,$\dot{x}$)/∂x)-(d/dt)(∂f0(t,x,$\dot{x}$)/∂$\dot{x}$)=0; *Условие Лежандра:*∂2H(t,x(t),u,1,λ(t))/∂u2≥0; ∂2f0(t,x(t),$ \dot{x}$(t))/∂x2≥0; *Условие Вейерштрасса.* H(t,x(t),u(t),1,λ(t))≤H(t,x(t),u,1,λ(t)); f0(t,x(t),u(t))+λ(t)u(t)-f0(t,x(t),u)-λ(t)u≤0; f0(t,x(t),u(t))-f0(t,x(t),u)+λ(t)(u(t)-u)≤0 ∀t∈[t0,t1], ∀x. Само усл-е: f0(t,x(t),u(t))-f0(t,x(t),u)-∂f0/∂u(u(t)-u)≤0; *Условие Якоби*. P= $\frac{1}{2}f\_{0x\dot{x}}$(t,x(t),$\dot{x}$(t)); Q=$\frac{1}{2}[f\_{0x\dot{x}}$(t,x(t),$\dot{x}$(t))-$ \frac{d}{dt}f\_{0x\dot{x}}$(t,x(t),$\dot{x}$(t))]; Qh-d/dt(Ph)=0; точка τ назыв сопряженной к t0 если реш-е этого ур-я с нач. усл-ями h(t0)=0; $\dot{h}$(t0)=1 удовлетворяет условию h(τ)=0. Усл-е Якоби: если x(t) – решение задачи вариационного исчисления, то на [t0,t1] нет точек, сопряженных с t0. **Зам.** Получили 4 необх. усл-я min-a простейшей задачи вариационного исчисления. Если рассм. ф-ции x(t)∈C1[t0,t1] то эти усл-я близки к достаточным. | **40.** I(x,u)= t0∫t1f0(t,x(t),u(t))dt+Ф0(x(t1)); **(1)** $\dot{x}$=f(t,x,u) **(2)**; Фi(t0,t1,x(t0),x(t1))=0 i=1..s **(3)**; x(t)∈Ω⊂Rn **(4)**; u∈U⊂Rm **(5)**t0∫t1G(t,x(t),u(t))dt=γ **(6)**; (6) называется интегральным огр-ем, а задача (1)-(6) – с инт. огр-ми. Можно ввести $\dot{x}\_{n+1}$=G(t,x,u) **(7)**; xn+1(t1)-xn+1(t0)=γ **(8)**; Усл-е (7) того же типа что и (2), а (8) – что и (3). Пришли к обычной задаче. На практике поступают сл. образом. H(t,x,u,λ0,λ)=λ0f0(t,x(t),u(t))+<λ,f>+λn+1G;$\dot{λ}$n+1=-∂H/∂xn+1=0; λn+1=const, для нахождения которой используют (6). | **41.** I= t0∫t1f0(t,x(t),u(t))dt+Ф0(x(t1)); **(1)** $\dot{x}$=f(t,x,u) **(2)** x(t0)=x0 **(3);** u(t)∈U⊂Rm**. (4)** Вместо задачи (1)-(4) рассм. новую задачу I(x,u)= t ∫t1f0(s,x(s),u(s))ds+Ф0(x(t1)); x=x(t) рассм. ф-цию Беллмана S(t,x)=inf(t ∫t1f0(s,x(s),u(s))ds+ Ф0(x(t1))) **Т.** Если в задаче (1)-(4) x(t) и u(t) – это оптимальная траектория и оптимальное управление, f0,Ф0,f непр. диф. по x и S(t,x) непр. диф, то выполняются: -∂S(t,x)/∂t=inf(f0(t,x(t),u)+ <∂S(t,x)/∂x,f(t,x,u)>) – ур-е Беллмана; S(t1,x(t))= Ф0(x(t1)) **Док.** Пусть в момент времени t находимся в (.) x, кот. ∈ оптимальной траектории. В дальнейшем будем выбирать оптимальную траекторию за счет выбора опт. управления. Выберем промежуток ∆t. ~~S(t,x)~~=inf(t ∫t+∆tf0(s,x(s),u(s))ds+t+∆t ∫t1f0(s,x(s),u(s))ds+ Ф0(x(t1)))=согласно принципу Б.,конец траектории должен быть оптимальным=inf(t ∫t+∆tf0(s,x(s),u(s))ds)+ S(t+∆t,x(t+∆t))=inf(t∫t+∆tf0ds)+~~S(t,x~~~~)~~+(∂S/∂t)∆t+(∂S/∂x)f+o(∆t). ∂S/∂t=-(∂S/∂x)f/∆t-o(∆t)/∆t-(1/∆t)inf(t ∫t+∆tf0ds) | **24. Т.** Пусть мн-во $U⊂R^{n}$выпукло, $int U\ne 0$ (мн-во внутр. точек не пусто). Ф-я *I* дважды непр. диф. на *U.* Тогда для выпуклости *I* Н.и Д., чтобы для $∀u\in U, ∀ξ\in R^{n}$ вып. условие: $<I^{''}\left(u\right)ξ,ξ>\geq 0$ **(1).** (Положит. опр. матр. 2й производной)**Док** *Н.* Пусть *I* – выпуклая ф-я. Рассм. 2 случая: 1) $u\in int U$. Возьмём $∀ξ\in R^{n}$. Будем рассм-ть т. $u+εξ$. При достаточно малых $ε$ эта (.) $u+εξ\in U$, т.к. $u$ – внутр. (.) и $U$ выпукло. По ф-ле Лагранжа о конечных приращениях имеет место: $I\left(u+εξ\right)-I\left(u\right)-ε<I\left(u\right),ξ>=\frac{ε^{2}}{2}<I^{''}\left(u+θεξ\right)ξ,ξ$, где θ∈(0,1); $I\left(u\right)\geq I\left(u\right)+<I^{'}\left(u\right),u-v>$*.* Если взять $u=u+εξ, v=u$, то $<I^{''}\left(u+θεξ\right)ξ,ξ>\geq 0;$ $ θεξ\rightarrow 0; <I^{''}\left(u\right)ξ,ξ>\geq 0;u$ *–* граничная точка $U$. => $∃$ посл-ть $\{u\_{k}\}\in U$, $u\_{k}→u, u\_{k}$ $\in int U.$ По доказанному в 1 случае, для $∀u\_{k}$ вып. нерав-во (1): $<I^{''}\left(u\_{k}\right)ξ,ξ>\geq 0$. Устремив $k\rightarrow \infty $ и воспользовавшись непрерывностью 2й производной получим (1). **Д.** Пусть вып. нер-ство (1). Возьмём любые $u,v\in U$. Для них вып.: $I\left(u\right)-I\left(v\right)-<I^{'}\left(v\right),u-v\geq \frac{1}{2}<I^{''}(v+θ\left(u-v\right)\left(u-v\right),u-v>\geq 0$ Пусть $ξ=u-v.$Получаем выпуклость.чтд **Зам.** При док-ве теоремы нигде не испольщовалось условие, что $int U\ne 0.$ Однако, отказаться от него нельзя. Для этого дост рассм пример: $I\left(u\_{1},u\_{2}\right)=u\_{1}^{2}-u\_{2}^{2}$; $U=\{u\_{1}\in R^{2}; u\_{2}=0\}$ |
|  | **30.** Рассм. задачу $I\left(u\right)\rightarrow inf⁡(1)u\in U=\{u\in U\_{0}\in R^{n}; g\_{i}\left(u\right)\leq 0;i=\overline{1,s}$ **(2)** В дальнейшем будем предполагать, что $I\left(u\_{\*}\right)=0$. $L\left(u,λ\_{0},λ\right)=λ\_{0}I\left(u\right)+\sum\_{i=1}^{s}λ\_{i}g\_{i}\left(u\right) \left(3\right)$ **Т.** (Куна-Таккера) Если $u\_{\*}$ - решение задачи (1,2), то $∃$ множители Лагранжа $λ\_{0}^{\*},λ\_{1}^{\*},…,λ\_{s}^{\*}$ такие, что $\sum\_{i=0}^{s}|λ\_{i}|\ne 0$, и вып. след. условие:**I.**1) $L\left(u\_{\*},λ\_{0}^{\*},λ^{\*}\right)\leq L\left(u,λ\_{0}^{\*},λ^{\*}\right) ∀u\in U\_{0} $(условие минимума); 2) $λ\_{i}^{\*}\geq 0, i=\overline{0,s}$ (условие неотрицательности); 3) $λ\_{i}^{\*}g\_{i}\left(u\_{\*}\right)$=0, $i=\overline{1,s}$ (условие дополнительной нежёсткости)**II.**Если $λ\_{0}^{\*}\ne 0$, то условия 1)-3) достаточны для того, чтобы $u\_{\*}$ было решением задачи (1,2).**III.**Для того, чтобы $λ\_{0}^{\*}\ne 0$, достаточно выполнения условия Слейтера: $∃\overline{u}\in U\_{0}, ∀i=\overline{1,s}$, $g\_{i}\left(\overline{u}\right)\leq $0.**Док. II:** Пусть $u\_{\*}\in U\_{0}$, и вып. условия 1)-3). Док, что $u\_{\*}$ - решение задачи (1),(2) ($I\left(u\_{\*}\right)<I(u)$). Возьмём $u\_{\*}\in U, рассм. I(u)$. По св-ву 2) $I\left(u\right)\geq I\left(u\right)+\sum\_{i=1}^{s}λ\_{i}^{\*}g\_{i}\left(u\right)=L\left(u,1, λ^{\*}\right)\geq L\left(u\_{\*},1,λ^{\*}\right)=I\left(u\_{\*}\right)+\sum\_{i=1}^{s}λ\_{i}^{\*}g\_{i}\left(u\_{\*}\right)=I(u\_{\*})$ => значение в произв. т. больше, чем в $u\_{\*}.$II доказано.**III:** Пусть вып. условие Слейтера. ПП: $λ\_{0}^{\*}=0.$ Запишем св-во 1) для т. $\overline{u}$. $λ\_{0}^{\*}I\left(u\_{\*}\right)+\sum\_{i=1}^{s}λ\_{i}^{\*}g\_{i}\left(u\_{\*}\right)\leq λ\_{0}^{\*}I\left(\overline{u}\right)+\sum\_{i=1}^{s}λ\_{i}^{\*}g\_{i}\left(\overline{u}\right)$ $λ\_{0}^{\*}=0$ => $0=\sum\_{i=1}^{s}λ\_{i}^{\*}g\_{i}\left(u\_{\*}\right)\leq \sum\_{i=1}^{s}λ\_{i}^{\*}g\_{i}\left(\overline{u}\right)<0$, причём, т.к. $λ\_{0}^{\*}=0, ∃λ\_{i}\ne 0, i=\overline{1,s}; $0<0 ПП. III доказано. | **25. Т.** Всякий локальный минимум выпуклой ф-ции *I* на вып. мн-ве *U* является глобальным минимумом.**д-во**: Пусть $u\_{\*}$ - т. лок. мин. ф-ии$ I$ на$ U.$ Возьмём $∀u\in U. $При достаточно малых $0<ε<1$ т. $u\_{\*}+ε\left(u-u\_{\*}\right)\in U.$ $0\leq I(u\_{\*}+ε\left(u-u\_{\*}\right)-I\left(u\_{\*}\right)=I\left(εu+\left(1-ε\right)u\_{\*}\right)-I\left(u\_{\*}\right)\leq εI\left(u\right)+\left(1-ε\right)I\left(u\_{\*}\right)-I\left(u\_{\*}\right)==εI\left(u\right)-εI\left(u\_{\*}\right).$т.к.$ ε>0$, $I\left(u\right)-I\left(u\_{\*}\right)\geq 0⇒I\left(u\right)\geq I\left(u\_{\*}\right)$т.к. $u$ – произвольная т. мн-ва$ U$, то последнее нерав-во означает, что $u\_{\*}$ - т. глобального мин. чтд. | **26. Т.** Если $I(u)$ - дифф-мая ф-я, $U$ - вып. мн-во, $u\_{\*}$ - т. лок. мин. ф-ии$ I\left(u\right)$, тогда:1. $∀u\in U <I^{'}\left(u\_{\*}\right),u-u\_{\*}>\geq 0 \left(1\right)$
2. Если $u\_{\*}$ - внутр. точка$ U$ ($u\_{\*}\in int U)$, то $I^{'}\left(u\_{\*}\right)=0.$
3. Если ф-я $I(u)$ выпукла на $U$, то усл-е (1) достаточно, чтобы $u\_{\*}$ была точкой глоб. мин. $I\left(u\right)$

**д-во:** Возьмём $∀u\in U$. $0\leq \frac{I(u\_{\*}+ε\left(u-u\_{\*}\right)-I(u\_{\*})}{ε}$Рассм. ф-ю $φ\left(ε\right)=I(u\_{\*}+ε\left(u-u\_{\*}\right))$$\frac{φ\left(ε\right)-φ\left(0\right)}{ε}\begin{matrix}ε\rightarrow \infty \\=\\\end{matrix}φ^{'}(0)$*.*$0\leq φ^{'}\left(0\right)=<I^{'}\left(u\_{\*}+ε\left(u-u\_{\*}\right)\right),u-u\_{\*}>|\_{ε=0}=<I^{'}\left(u\_{\*}\right),u-u\_{\*}>.$1 п. доказан.2п. – Теорема Ферма.д-во 3п.: Возьмём $u\in U$ и рассм. $I\left(u\right)-I\left(u\_{\*}\right)-<I^{'}\left(u\_{\*}\right),u-u\_{\*}>\geq 0⇒I\left(u\right)\geq I\left(u\_{\*}\right)⇒u\_{\*}- т.мин.$чтд. |
| **27**. $I\left(u\right)\rightarrow sup$ **(1)**; $u\in U$ **(2)**;эту задачу сводят к задаче на минимум след. образом: $-I\left(u\right)\rightarrow inf$, $u\in U$; Замечание. ф-я $–I(u)$ вогнутая и предыдущие результаты не подходят.**Т.** Если в задаче (1,2) т. $u\_{\*} $- т. глоб. макс. I на выпук замкн огр-ом мн-ве $U$, то $∃$ крайние точки мн-ва $U$, в кот. ф-я принимает значение $I\left(u\_{\*}\right).$**д-во:** $u\_{\*}=\sum\_{k=1}^{m}α\_{k}u\_{k}; \sum\_{k=1}^{m}α\_{k}=1; α\_{k}\geq 0$;(по уже доказанному). Рассм. $I\left(u\_{\*}\right)=I\left(\sum\_{k=1}^{m}α\_{k}u\_{k}\right)\leq \sum\_{k=1}^{m}α\_{k}I(u\_{\*})=I\left(u\_{\*}\right)\sum\_{k=1}^{m}α\_{k}=I(u\_{\*})$$I\left(u\_{\*}\right)\leq I\left(u\_{\*}\right).$Это возможно, только если везде стоят знаки рав-ва, т.е. $I\left(u\_{k}\right)=I(u\_{\*})$. чтд | **28.** Рассм. задачу $I\left(u\right)\rightarrow inf⁡(1)u\in U=\{u\in U\_{0}\in R^{n}; g\_{i}\left(u\right)\leq 0;i=\overline{1,s}$ **(2)**} Постановка задачи. Среди всех т. $u\in U,$ где $U$ выпукло, ф-ии $g\_{i}\left(u\right)$ вып., ф-я $I$ вып., требуется найти такую, которая доставляет минимум ф-ции $I(u)$. Эта задача называется задачей выпуклого программирования. Точки $u\_{\*}$, удовлетворяющие условию, наз. решением задачи, а т. $u\in U$ называются допустимыми. | **29.** Рассм. задачу $I\left(u\right)\rightarrow inf⁡(1)u\in U=\{u\in U\_{0}\in R^{n}; g\_{i}\left(u\right)\leq 0;i=\overline{1,s}$ **(2)** В дальнейшем будем предполагать, что $I\left(u\_{\*}\right)=0$. $L\left(u,λ\_{0},λ\right)=λ\_{0}I\left(u\right)+\sum\_{i=1}^{s}λ\_{i}g\_{i}\left(u\right) \left(3\right)$ **Т.** Куна-Таккера. Если $u\_{\*}$ - решение задачи (1,2), то $∃$ множители Лагранжа $λ\_{0}^{\*},λ\_{1}^{\*},…,λ\_{s}^{\*}$ такие, что $\sum\_{i=0}^{s}|λ\_{i}|\ne 0$, и вып. след. условие:**I.**1) $L\left(u\_{\*},λ\_{0}^{\*},λ^{\*}\right)\leq L\left(u,λ\_{0}^{\*},λ^{\*}\right) ∀u\in U\_{0} $(условие минимума); 2) $λ\_{i}^{\*}\geq 0, i=\overline{0,s}$ (условие неотрицательности); 3) $λ\_{i}^{\*}g\_{i}\left(u\_{\*}\right)$=0, $i=\overline{1,s}$ (условие дополнительной нежёсткости)**II.**Если $λ\_{0}^{\*}\ne 0$, то условия 1)-3) достаточны для того, чтобы $u\_{\*}$ было решением задачи (1,2).**III.**Для того, чтобы $λ\_{0}^{\*}\ne 0$, достаточно выполнения условия Слейтера: $∃\overline{u}\in U\_{0}, ∀i=\overline{1,s}$, $g\_{i}\left(\overline{u}\right)\leq $0.**док-во** Рассм. мн-во $Л\_{0}=\{λ\in R^{s}, λ\geq 0,i=\overline{1,s}\}$ **(4)**I: Введём мн-во $Q=\left\{μ\in R^{s+1}: ∃u\in U\_{0} I\left(u\right)<μ\_{0}, g\_{i}\left(u\right)<μ\_{i}, i=\overline{1,s}\right\}$ (5) Покажем, что мн-во $Q$ не пусто. Возьмём $μ $такой, что $μ\_{i}>0, i=\overline{0,s}$. Этот вектор $μ\in Q.$ В качестве u берём $u\_{\*}\in U\_{0}.I\left(u\_{\*}\right)=0<μ\_{0}.$ Для $g\_{i}\left(u\_{\*}\right)\leq 0<μ\_{i} ⇒ μ\in Q.$ Т.о. все векторы, компоненты которых строго положит-ны, лежат в мн-ве Q. Покажем теперь, что мн-во Q выпукло. Возьмём 2т. $μ^{'},μ^{''}\in Q, и 0<α<1.$ Покажем, что $αμ^{'}+\left(1-α\right)μ^{''}\in Q$: $μ^{'}\in Q⇒∃u^{'}\in U\_{0} I\left(u^{'}\right)<μ'\_{0}, g\_{i}\left(u'\right)<μ'\_{i}, i=\overline{1,s}$; $μ'^{'}\in Q⇒∃u^{''}\in U\_{0} I\left('\right)<μ''\_{0}, g\_{i}\left(u''\right)<μ''\_{i}, i=\overline{1,s}$; Рассм. точку $\tilde{u}=αu^{'}+\left(1-α\right)u^{''}. В силу выпуклости U\_{0} \tilde{u}\in U\_{0}$. | Рассм. $I\left(\tilde{u}\right)=I\left(αu^{'}+\left(1-α\right)u^{''}\right)\leq αI\left(u^{'}\right)+\left(1-α\right)I\left(u^{''}\right)<αμ'\_{0}+(1-α)μ''\_{0}$; Аналогично $g\_{i}\left(\tilde{u}\right)$=$g\_{i}\left(αu^{'}+\left(1-α\right)u^{''}\right)\leq αg\_{i}\left(u^{'}\right)+\left(1-α\right)g\_{i}\left(u^{''}\right)< αμ'\_{i}+(1-α)μ''\_{i}$; А это означает, что $αμ^{'}+\left(1-α\right)μ^{''}\in Q⇒$ мн-во Q выпукло. Покажем, что $0\notin Q. $ПП. $μ=0\in Q⇒$ $∃u\in U\_{0}:I\left(u\right)<0, g\_{i}\left(u\right)<0, i=\overline{1,s}.I\left(u\right)<0=I\left(u\_{\*}\right).ПП. $По Т. о повторной гиперпл-ти, $∃\vec{с}\ne 0, c\in R^{s+1}; <c,μ>\leq <c,0>=0.$Умножим нерав-во на (-1). $<-c,μ>\geq 0.$$-c=\left(λ\_{0}^{\*},λ\_{1}^{\*},…,λ\_{s}^{\*}\right)\ne 0⇒\sum\_{k=0}^{s}\left|λ\_{k}\right|\ne 0; \sum\_{i=0}^{s}λ\_{i}^{\*}μ\_{i}\geq 0$. (6) Покажем, что вып. 2е условие. $i\_{0}=0,1,…,s; μ=\left(ε,…,ε,1,ε,…,ε\right)\in Q, ε>0 $(1 на $i\_{0}$ месте); В этом случае неравенство (6) примет вид: $ε\sum\_{\begin{array}{c}i=0\\i\ne i\_{0}\end{array}}^{s}λ\_{i}^{\*}+λ\_{i\_{0}}^{\*}\geq 0; λ\_{i\_{0}}^{\*}\geq -ε\sum\_{\begin{array}{c}i=0\\i\ne i\_{0}\end{array}}^{s}λ\_{i}^{\*}+λ\_{i\_{0}}^{\*} $ устремим $ε\rightarrow 0; λ\_{i\_{0}}^{\*}\geq 0$. Т.к. $i\_{0}$ было произвольным, то 2) доказано. Докажем 3): пусть $λ\_{i\_{0}}^{\*}>0.$Рассм. вектор $μ=\left(ε,…,ε, g\_{i\_{0}}\left(u\_{\*}\right),ε,…,ε\right), ε>0.$ Покажем, что этот вектор принадл. Q. В кач-ве u берём $u=u\_{\*}.I\left(u\_{\*}\right)=0<ε; g\_{i}\left(u\_{\*}\right)<ε, i\ne i\_{0}$; $g\_{i\_{0}}\left(u\_{\*}\right)=g\_{i}\left(u\_{\*}\right)+ε$*.* Выпишем (6) для этого вектора: $ε\sum\_{i=0}^{s}λ\_{i}^{\*}+λ\_{i\_{0}}^{\*}g\_{i\_{0}}\left(u\_{\*}\right)\geq 0$; $λ\_{i\_{0}}^{\*}g\_{i\_{0}}\left(u\_{\*}\right)\geq -ε\sum\_{i=0}^{s}λ\_{i}^{\*}$; $λ\_{i\_{0}}^{\*}g\_{i\_{0}}\left(u\_{\*}\right)\geq 0 \left(7\right)$$\left\{\begin{array}{c}λ\_{i\_{0}}^{\*}>0\\g\_{i\_{0}}\left(u\_{\*}\right)\leq 0\end{array}\right.=> λ\_{i\_{0}}^{\*}g\_{i\_{0}}\left(u\_{\*}\right)\leq 0;=>λ\_{i\_{0}}^{\*}g\_{i\_{0}}\left(u\_{\*}\right)=0.$ 3) доказано. $Докажем 1).$ $μ=\left(I\left(u\right)+ε, g\_{1}\left(u\right),…,g\_{s}\left(u\right)\right)\in Q$. (6) означает, что $λ\_{0}\left(I\left(u\right)+ε\right)+\sum\_{i=1}^{s}g\_{i}\left(u\right)λ\_{i}^{\*}\geq 0.$ *=>*$λ\_{0}^{\*}I\left(u\right)+\sum\_{i=1}^{s}g\_{i}\left(u\right)λ\_{i}^{\*}\geq λ\_{0}^{\*}ε;Устр. ε\rightarrow 0.$Получим $λ\_{0}^{\*}I\left(u\right)+\sum\_{i=1}^{s}g\_{i}\left(u\right)λ\_{i}^{\*}\geq 0$. Рассм. $L\left(u,λ\_{0}^{\*},λ^{\*}\right)=λ\_{0}^{\*}I\left(u\right)+\sum\_{i=1}^{s}λ\_{i}^{\*}g\_{i}\left(u\right)\geq 0=λ\_{0}^{\*}I\left(u\_{\*}\right)+$ $\sum\_{i=1}^{s}λ\_{i}^{\*}g\_{i}\left(u\_{\*}\right)=L\left(u\_{\*},λ\_{0}^{\*},λ^{\*}\right)$. 1) доказано. |
|  |  |  |